Systèmes dynamiques, M1

Université de Picardie Jules Verne, 2021

Systèmes dynamiques (II)

II. Dynamique topologique

1) Notions générales

Un système dynamique topologique (discret) est défini par une application continue $T : X \to X$ où X = espace topologique.

$\rightsquigarrow$ On étudie l'action de $\mathbb{N}$ induite par l'itération de T :

$$\underset{\substack{\cap \\ X}}{n(x)} = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n \text{ fois}}(x) = T^n(x)$$

Si T est un homéomorphisme on peut définir T^k, $k \leq 0$ en posant $T^k = (T^{-1})^{\overbrace{-k}^{\geq 0}}$

$\rightsquigarrow$ on obtient une action de $\mathbb{Z}$: T^n, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\Big((n+m)(x) = T^{n+m}(x) = \underbrace{T^n \circ T^m}_{n(m(x))}(x) = \underbrace{T^m \circ T^n}_{m(n(x))}(x) \Big)$$

Rappels :

- $x \in X \rightsquigarrow \mathcal{O}^+(x)$ = orbite positive
  $\mathcal{O}(x)$ = orbite si le système T est un homéo.
- points périodiques $\left(T^n(x) = x, \quad n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z} \right)$
- parties invariantes : $Y \subset X$ est invariant si $T^{-1}(Y) = Y$
  positivement inv. si $T(Y) \subset Y$
  nég. inv. si $Y \subset T(Y)$

Remarque :

- une orbite positive est positivement invariante
  $\left(n \geq 0, \quad T\left(T^n(x)\right) = T^{n+1}(x) \in \mathcal{O}^+(x) \right)$
- si Y est une partie positivement inv. alors son adhérence $\overline{Y}$ aussi.

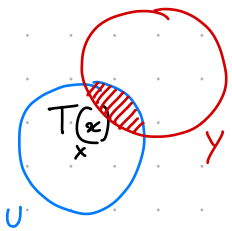
En effet, si $x \in \overline{Y}$, alors $\forall U$ voisinage de $T(x)$,

$T^{-1}(U)$ est un voisinage de x (car T est C^0)

et donc $T^{-1}(U) \cap Y \neq \emptyset$ (puisque $x \in \overline{Y}$)

et donc, $\emptyset \neq T\left(T^{-1}(U) \cap Y\right) \subset U \cap T(Y) \subset U \cap Y$

$\Rightarrow U \cap Y \neq \emptyset$, et donc $T(x) \in \overline{Y}$

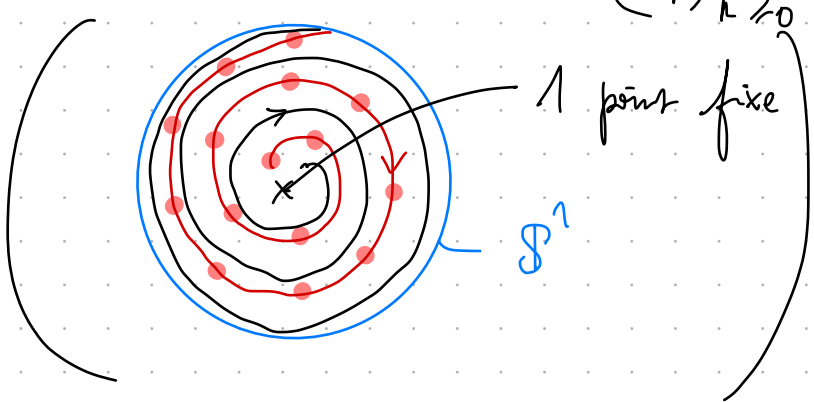


- L'union ou l'intersection de parties positivement invariantes $(Y_i)_{i\in I}$ est positivement invariante. En effet

$$T\Big(\bigcap_{i\in I} Y_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} \underbrace{T(Y_i)}_{\subset Y_i} \subset \bigcap_{i\in I} Y_i$$

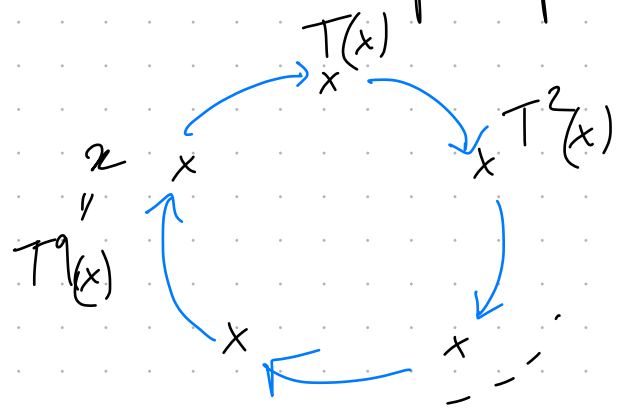
et $$T\Big(\bigcup_{i\in I} Y_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \underbrace{T(Y_i)}_{\subset Y_i} \subset \bigcup_{i\in I} Y_i$$

Déf. : L'ensemble ω-limite d'un point $x \in X$ est l'ensemble $\omega(x)$ des points d'accumulation de la suite $(T^n(x))_{n\geq 0}$: un point y appartient à $\omega(x)$ s'il existe une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers ≥ 0 t.q. $\lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty$,



et $\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(x) = y$.

Exemples : 1) si x est un point périodique, alors $\omega(x) = \mathcal{O}^+(x)$.



2) Soit $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x+1$ $\rightsquigarrow$ $\omega(x) = \emptyset$, $\omega(x) \subset \mathbb{Z}$

$\mathcal{O}^+(x)$

$x \quad x+1 \quad x+2 \quad x+3 \quad \dots \longrightarrow +\infty$

Proposition : l'ensemble $\omega(x)$ est fermé et positivement invariant.

Si T est un homéomorphisme, il est invariant.

fermeture

dém. : on peut écrire $\omega(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\{T^n(x),\ n \geq m\}}$ (fermé comme intersection de fermés)

$= \bigcap_{m \geq 0} \overline{\mathcal{O}^+(T^m(x))}$ (positivement inv. car int. d'ensembles positivement inv. d'après ci-dessus)

Remarque : Si X est compact, alors $\omega(x) \neq \emptyset$.

En effet, la suite $\left(\overline{\mathcal{O}^+(T^n(x))}\right)_{n \geq 0}$ est décroissante et formée de parties fermées non vides de X donc leur intersection $\left(= \omega(x)\right)$ est non-vide.

Déf. : Si $T : X \to X$ est un homéomorphisme, on peut définir l'ensemble α-limite $\underset{\substack{\cap \\ X}}{\alpha(x)}$ comme l'ensemble des points d'accumulation de $\left(T^{-n}(x)\right)_{n \geq 0}$. C'est une partie fermée et invariante.

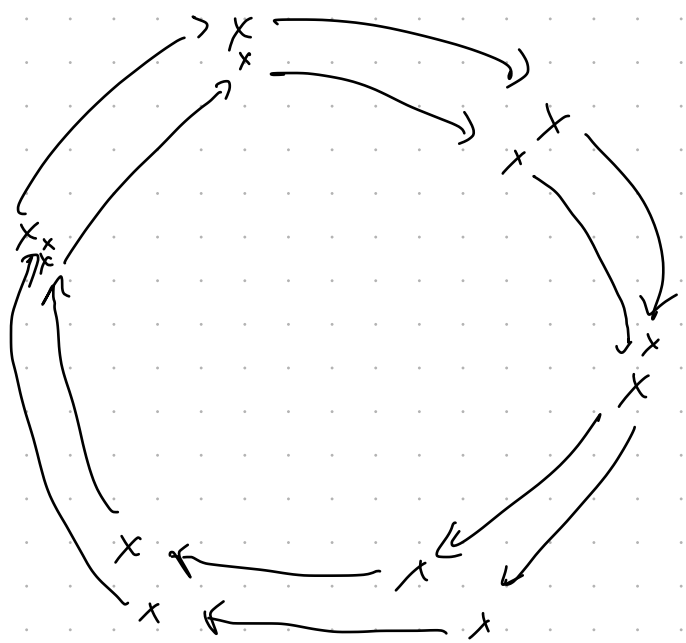
Remarque : Si Y est une partie fermée et positivement invariante, alors pour tout $y \in Y$, on a $\omega(y) \subset Y$. $\left(\omega(Y) \subset Y\right)$

En particulier, $\forall x \in X$ et $\forall y \in \omega(x)$, on a $\omega(y) \subset \omega(x)$.
$\left(Y = \omega(x)\right)$

Déf. : un point $x \in X$ est (positivement) récurrent si $x \in \omega(x)$.

Cela signifie qu'il existe une suite $(n_k)_k$ d'entiers positifs t.q.

$$n_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{k \to +\infty} T^{n_k}(x) = x$$



exemple : tout point périodique est récurrent.

Prop. : l'ensemble $\mathrm{Rec}^+(T)$ des points (positivement) récurrents est positivement invariant (invariant dans le cas où T = homéo.)

Dém. : Supposons qu'il existe $(n_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_k n_k = +\infty$ et $\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(x) = x$. Alors

$$\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}\big(T(x)\big) = \lim_{k\to+\infty} T\Big(\underbrace{T^{n_k}(x)}_{\xrightarrow[k]{} x}\Big) = T(x)$$

donc $T(x) \in \mathrm{Rec}^+(T)$.

Si T = homéo, on a

$$\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}\big(T^{-1}(x)\big) = \lim_{k\to+\infty} T^{-1}\big(T^{n_k}(x)\big) = T^{-1}(x).$$

On peut définir une notion encore plus faible de récurrence :

Déf. : un point $x \in X$ est errant s'il existe un voisinage U de x t.q. $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$. Dans le cas contraire on dit que x est non-errant.

Remarque :

- tout point positif récurrent est non-errant.

Proposition : l'ensemble $\Omega(T)$ des points non-errants est fermé et positivement invariant (inv. si T = homéo.)

dém. : si $x \in (X \setminus \Omega(T))$, il existe U vois. de x t.q. $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, $\forall n \geq 1$

Ceci implique que $U \cap \Omega(T) = \emptyset$

($\forall y \in U$, U est un vois. ouvert de y t.q. $T^{-n}(U) \cap U = \emptyset$, $\forall n \geq 1$

donc $y \notin \Omega(T)$)

donc $U \subset (X \setminus \Omega(T))$ donc $X \setminus \Omega(T)$ est ouvert

donc $\Omega(T)$ est fermé.

Soit $x \in \Omega(T)$ et U un voisinage de $T(x)$. L'ensemble $T^{-1}(U)$ est un voisinage de x donc il existe $n \geq 1$, t.q. $T^{-n}(T^{-1}(U)) \cap T^{-1}(U) \neq \emptyset$

mais $T^{-n}\left(T^{-1}(U)\right) \cap T^{-1}(U) = T^{-(n+1)}(U) \cap T^{-1}(U) \neq \emptyset$

donc $\emptyset \neq T\left(T^{-(n+1)}(U) \cap T^{-1}(U)\right) \subset T^{-n}(U) \cap U$

donc $T(x) \in \Omega(T)$ $\left(\begin{array}{l} U \text{ est un vois. arbitraire de } T(x) \\ n \text{ est arbitrairement grand} \end{array}\right)$. $\blacksquare$

Pour résumer, on a les inclusions :

$$\mathrm{Fix}(T) \subset \mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{Rec}^{\pm}(T) \subset \Omega(T).$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\left(T(x) = x\right) \qquad \left(\begin{array}{l} T^n(x) = x, \\ n \geq 1 \end{array}\right)$$

Déf. (Conjugaison)

On dit que deux applications continues $T : X \to X$, $S : Y \to Y$ sur des esp. topo. X et Y

sont **conjuguées** s'il existe un homéomorphisme $H : X \to Y$ t.q.

$$H \circ T = S \circ H,$$

i.e. le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "H"] \\ Y \arrow[r, "S"'] & Y \end{tikzcd}$$

On dit que H est une conjugaison entre T et S.

ex. : $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} ; |z| = 1 \}$. L'application $\underset{=H}{\exp} : \underset{T^1 = X}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \to \underset{=Y}{S^1}$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ est un homéo.

Soit $T : \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ [x] & \to & [2x] \end{array}$ $\quad ([x] \in \mathbb{T}^1)$

et $S : S^1 \longrightarrow S^1$
$z \longmapsto z^2$

Alors T et S sont conjugués par H :

$$\left(\begin{array}{l} H \circ T([x]) = H([2x]) = e^{2\pi i [2x]} = e^{2\pi i 2x} = \left(e^{2\pi i x}\right)^2 = \left(e^{2\pi i [x]}\right)^2 = S \circ H([x]) \\ \forall [x] \in \mathbb{T}^1 \end{array} \right)$$

[Si $\tilde{T} : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$
$[x] \longmapsto -[x]$ alors $H \circ \tilde{T}([x]) = H(-[x]) = e^{-2\pi i x} = \overline{e^{2\pi i x}}$
$= \tilde{S} \circ H([x])$

et $\tilde{S} : S^1 \longrightarrow S^1$
$z \longmapsto \overline{z} = \frac{1}{z}$]

Prop. : Si $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ sont conjugués par $H : X \to Y$,

alors $\forall\, n \geq 0$, on a $H \circ T^n = S^n \circ H$.

Si T ou S est un homéo., il en est de même de l'autre application T/S

et $H \circ T^k = S^k \circ H$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

dém. : $H \circ T^2 = \underbrace{(H \circ T)}_{S \circ H} \circ T = S \circ \underbrace{(H \circ T)}_{S \circ H} = S \circ S \circ H = S^2 \circ H$

$\rightsquigarrow$ par récurrence on a $H \circ T^n = S^n \circ H$, $\forall n \geq 0$.

On peut écrire $S = H \circ T \circ H^{-1}$. Si T est un homéo., alors $S = H \circ T \circ H^{-1}$ aussi.

De plus,
$$S^{-1} = (H \circ T \circ H^{-1})^{-1}$$
$$= H \circ T^{-1} \circ H^{-1}$$

Donc H conjugue T^{-1} à S^{-1}, et aussi T^{-n} à S^{-n}, $\forall n \geq 0$. ∎

Le point important est que H envoie les orbites de T sur les orbites de S.

Prop. : Supposons que $H : X \to Y$ conjugue $T : X \to X$ à $S : Y \to Y$.

1) $\forall x \in X$, $H(\omega_T(x)) = \omega_S(H(x))$.

2) Les images par H des ensembles $\mathrm{Per}(T)$, $\mathrm{Rec}^+(T)$, $\Omega(T)$ sont égales resp. à $\mathrm{Per}(S)$, $\mathrm{Rec}^+(S)$, $\Omega(S)$.

3) Si T est un homéo., alors $H(\mathrm{Rec}^-(T)) = \mathrm{Rec}^-(S)$.

De plus, $H(\alpha_T(x)) = \alpha_S(H(x))$, $\forall x \in X$.

dém. : 1) Si $x' \in \omega_T(x)$, alors $(n_k)_k \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ t.q. $n_k \to +\infty$, et $\lim_{k\to+\infty} T^{n_k}(x) = x'$.

On déduit $H(x') = \lim_{k\to+\infty} \underbrace{H \circ T^{n_k}(x)}_{S^{n_k} \circ H(x)}$

$$= \lim_{k\to+\infty} S^{n_k}(H(x))$$

donc $H(x') \in \omega_S(H(x))$.

Réciproquement, si $y' \in \omega_S(y)$ alors $H^{-1}(y') \in \omega_T(H^{-1}(y))$.

On déduit de 1) que H envoie $\mathrm{Rec}^+(T)$ sur $\mathrm{Rec}^+(S)$.

Si x est un point pér. de T, de période $q \geq 1$, alors

$$T^q(x) = x \Rightarrow \underbrace{H \circ T^q(x)}_{S^q \circ H(x)} = H(x) \quad \text{donc } S^q(H(x)) = H(x)$$

donc $H(x)$ est q-périodique pour S.

De plus, $T^k(x) \neq x$ pour $k \in \{1, \dots, q-1\}$

$$\Rightarrow S^k(H(x)) \neq H(x)$$

donc q est bien la période de $H(x)$. $\blacksquare$

Déf.: Soient $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$ deux applications continues.

L'application S est un facteur de T s'il existe $H : X \to Y$ surjective t.q.

$$H \circ T = S \circ H.$$

L'application H est une semi-conjugaison.

exemple : Soit $[a] \in \mathbb{T}^1$, et $S : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$

$$[x] \mapsto [x+a] = [x] + [a]$$

Alors S est un facteur de $T : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$

$$([x_1], [x_2]) \mapsto ([x_1 + a], [x_1 + x_2])$$

La semi-conjugaison est la projection $H : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$

$$([x_1], [x_2]) \mapsto [x_1].$$

Prop.: Supposons que $H : X \to Y$ semi-conj. entre $T : X \to X$ et $S : Y \to Y$

Alors i) $\forall n \geq 0$, $H \circ T^n = S^n \circ H$.

ii) $\forall x \in X$, $H(\omega_T(x)) \subset \omega_S(H(x))$

iii) $H(\mathrm{Per}(T)) \subset \mathrm{Per}(S)$, $H(\mathrm{Rec}^+(T)) \subset \mathrm{Rec}^+(S)$, $H(\Omega(T)) \subset \Omega(S)$.

De plus, $\forall x \in \mathrm{Per}(T)$ la période de $H(x)$ divise celle de x.

iv) Si T, S sont des homéos, $H \circ T^k = T^k \circ H$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Et $H(\mathrm{Rec}^-(T)) \subset \mathrm{Rec}^-(S)$

$H(\alpha_T(x)) \subset \alpha_S(H(x))$, $\forall x \in X$.

Exemple important : Soit $d \geq 2$ un entier.

Une fonction continue $f : \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}^1$ est dite de degré d

si elle admet un relevé $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.q. $F(x+k) = F(x) + kd$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Rappelons que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un relevé de f si F est continue et

$\forall \; [x] = \pi(x) \in \mathbb{T}^1$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $\pi : x \longmapsto \underset{\substack{\parallel \\ x \bmod 1}}{[x]}$ la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}^1$

on a $f(\pi(x)) = \pi(F(x))$)

Théorème : Soit $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ une application continue de degré $d \geq 2$.

Alors f est semi-conjuguée à $E_d : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$, i.e. $\exists \, h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ surjective t.q.
$[x] \longmapsto [dx]$

$$\boxed{h \circ f = E_d \circ h}$$

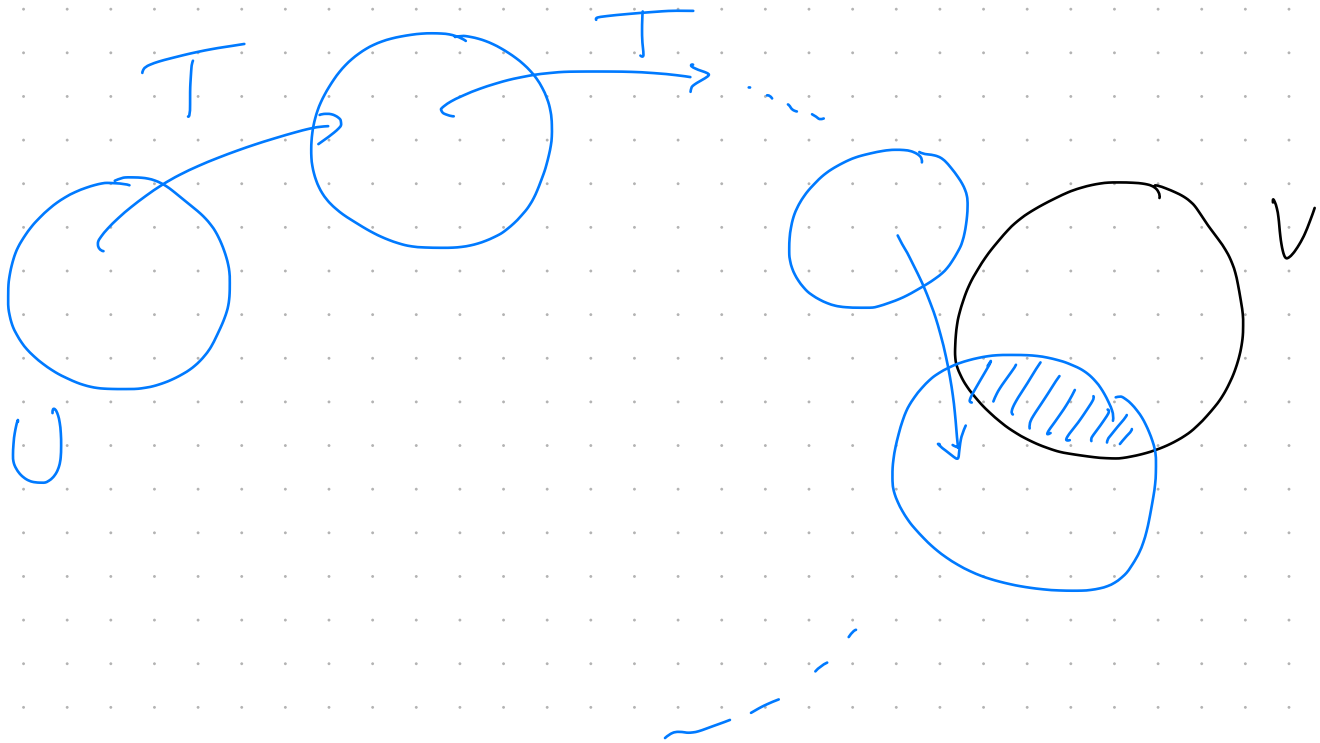
dém. : vu en TD (exercice 10, feuille 2). ■

Transitivité

Déf. : Soit $T : X \to X$ une transformation continue. On dit que T est **positivement transitive** si $\forall\, U, V$ ouverts non-vides, $\exists\, n \geq 0$ entier t.q.

$$U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset.$$

Si T est un homéo., on dit que T est **transitif** si $\forall\, U, V \neq \emptyset$ ouverts, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ t.q. $U \cap T^{-k}(V) \neq \emptyset$.



Déf. : un espace topo. est **un espace de Baire** si l'intersection de toute famille dénombrable de parties ouvertes et denses est dense.

Remarque : • un espace topo. compact (ou un espace métrique complet) est un espace de Baire.

• un ensemble G_δ d'un espace topo. est l'intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes de X. Si X est de Baire, alors tout ensemble G_δ est dense.

Déf. : Un espace topo. X est **séparable** s'il existe $(O_i)_{i\in I}$ base dénombrable d'ouverts :
$\forall U \subset X$ ouvert, $U = \bigcup_{j\in J} O_j$, $J \subset I$.

Exemples : • les espaces métriques compacts sont séparables

• $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, est séparable.

Prop. : Soit X un espace de Baire séparable et $T : X \to X$ une transformation continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) T est positivement transitif

2) $\exists x \in X$, t.q. $\omega(x) = X$

3) l'ensemble des $x \in X$ t.q. $\omega(x) = X$ contient un ensemble G_δ.

dém. : fait en TD (exercice 2, feuille 2). ■